

Matematica pas cu pas

Exerciții
și probleme
pentru
clasa a VII-a



7

coordonator **Radu Gologan**
Camelia Elena Neța
Ciprian Constantin Neța
Gabriel Vrînceanu



Grupul
editorial
Corint

CUPRINS

Capitolul 1

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

- Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural 5
- Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional 8
- Scoaterea factorilor de sub radical.
- Introducerea factorilor sub radical 10
- Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale.
- Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 12
- Modulul unui număr real 15
- Compararea și ordonarea numerelor reale.
- Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări 17
- Adunarea și scăderea numerelor reale 19
- Înmulțirea și împărțirea numerelor reale 21
- Puteri cu exponent număr întreg 24
- Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ 26
- Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$.
- Media geometrică a două numere reale pozitive 28
- Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ 31
- *Teste de evaluare* 33

Capitolul 2

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

- Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă; identități 35
- Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente. 36
- Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute 39
- *Teste de evaluare* 45

Capitolul 3

ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

- Reprezentarea perechilor de numere și a punctelor geometrice într-un sistem de axe ortogonale 47
- Distanța dintre două puncte din plan 50
- Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice.
- Poligonul frecvențelor 52
- *Teste de evaluare* 57

Capitolul 4

PATROLATERUL

- Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex 59
- Paralelogramul 62
- Linia mijlocie în triunghi. Centrul de greutate al unui triunghi 67
- Paralelograme particulare: dreptunghiul 71
- Paralelograme particulare: romb și pătratul 74
- Trapezul: clasificare, proprietăți 79
- Perimetre și arii 84
- *Teste de evaluare* 89

Capitolul 5

CERCUL

- Coarde și arce în cerc, proprietăți 91
- Unghi înscris în cerc 94
- Tangente dintr-un punct exterior la un cerc 97
- Poligoane regulate înscrise într-un cerc 100
- Lungimea cercului și aria discului 103
- *Teste de evaluare* 105

Capitolul 6

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

- Segmente proporționale 107
- Teorema lui Thales 110
- Reciproca teoremei lui Thales 114
- Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării 117
- Criterii de asemănare a triunghiurilor 120
- *Teste de evaluare* 124

Capitolul 7

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

- Proiecții ortogonale pe o dreaptă 125
- Teorema lui Pitagora 132
- Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic 137
- Rezolvarea triunghiului dreptunghic 141
- *Teste de evaluare* 149
- *Recapitulare finală* 151
- *Indicații și răspunsuri* 159

ESTIMAREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL

❖ Oricare ar fi numărul rațional a , $\sqrt{a^2} = |a|$, unde $|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$.

❖ $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2} \neq \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$. ❖ Dacă $0 \leq a < b$, atunci $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

SĂ NE AMINTIM

ALGORITMUL DE CALCUL AL RĂDĂCINII PĂTRATE A PĂTRATULUI UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Calculăm $\sqrt{1444}$.

1. Se desparte numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.	$\sqrt{14'44}$
2. Căutăm numărul cel mai mare al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 14 (prima grupă): $3^2 < 14 < 4^2$. Scriem la rezultat 3 și scădem din 14 pe 3^2 ; 3 este un rezultat parțial.	$\begin{array}{r} \sqrt{14'44} \quad 3 \\ \underline{9} \\ 5 \end{array}$
3. Lângă primul rest parțial (5) coborâm următoarea grupă. Sub rezultat trecem dublul rezultatului parțial consemnat până la această etapă (în cazul nostru, 3 este rezultatul parțial, deci consemnăm dublul său, 6).	$\begin{array}{r} \sqrt{14'44} \quad 3 \\ \underline{9} \quad 6 \\ 544 \end{array}$
4. Verificăm de câte ori se cuprinde 6 (dublul rezultatului parțial) în 54, $54 : 6 = 8$ rest 6. Trecem 8 lângă 6 (de sub rezultat) și calculăm $68 \cdot 8 = 544$. Dacă rezultatul înmulțirii lui 68 cu 8 era mai mare decât 544, încercăm o cifră mai mică ($67 \cdot 7$).	$\begin{array}{r} \sqrt{14'44} \quad 38 \\ \underline{9} \quad 68 \cdot 8 = 544 \\ 544 \\ \underline{544} \\ 0 \end{array}$
5. Deoarece se obține un rest 0, algoritmul se încheie având rezultatul extragerii rădăcinii pătrate (dintr-un pătrat perfect).	$\sqrt{1444} = 38$

EXERSAȚII!



- Încadrați între două numere întregi consecutive numerele: $1,35$; $-2,(7)$; $-\frac{13}{4}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{21}$; $-\sqrt{17}$; $-\sqrt{65}$.
- Arătați că următoarele numere sunt naturale: $\sqrt{289}$; $\sqrt{361}$; $\sqrt{484}$; $\sqrt{3600}$; $\sqrt{1764}$. Ce proprietate a numerelor se poate evidenția?
- Folosind calculatorul, verificați dacă este corect calculul următor: $\sqrt{1936} + \sqrt{2304} - \sqrt{7921} = 3$. Formulați argumente care susțin răspunsul dat.
- Fără a calcula rădăcina pătrată, încadrați următorii radicali între două numere naturale consecutive: $\sqrt{8}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{28}$; $\sqrt{101}$; $\sqrt{180}$.

5. Calculați rădăcina pătrată a următoarelor numere: 361; 961; 196; 4,41; 10,24; 0,81; 841; 1444; 2116; 2209; 29,16; 0,0529; 75,69; 94,09; 1,1449; 647,1936; 9,006001; 576,4801.

6. Calculați: $\sqrt{1,(7)}$; $\sqrt{1,69}$; $\sqrt{1,36(1)}$; $\sqrt{1,52(1)}$.

7. Calculați, cu aproximare prin lipsă: a. $\sqrt{5,3}$ (la zecimi); b. $\sqrt{0,097}$ (la sutimi); c. $\sqrt{12,90045}$ (la miimi).

8. Calculați cu două zecimale exacte: a. $\sqrt{7}$; b. $\sqrt{19}$; c. $\sqrt{6}$; d. $\sqrt{17}$.

9. Determinați valoarea radicalilor $\sqrt{12}$; $\sqrt{23}$; $\sqrt{35}$ cu o zecimală exactă și verificați rezultatele folosind calculatorul. *Indicație:* puteți utiliza algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate sau încadrarea rezultatului între valori convenabile.

10. Calculați cu aproximație de o zecime, respectiv o sutime, prin lipsă și prin adaos, radicali $\sqrt{10}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{101}$, folosind calculatorul.

11. Utilizând calculatorul de buzunar, extrageți rădăcina pătrată din numerele 8; 1,25; $\sqrt{121}$, rotunjind rezultatul până la zecimi, respectiv sutimi.

12. Folosind minicalculatorul, completați tabelul:

Numărul	Aproximarea prin lipsă la sutimi	Aproximarea prin adaos la sutimi	Rotunjirea la sutimi
$\frac{11}{12}$			
$\sqrt{18}$			
$\sqrt{1,8}$			
$\sqrt{0,037249}$			



13. Folosind calculatorul de buzunar, verificați dacă sunt adevărate relațiile:

a. $\sqrt{27} \leq \sqrt{20} + \sqrt{7}$; b. $\sqrt{15} - 2 \leq \sqrt{2} + 2$.

Atenție la utilizarea aproximărilor pe care le obțineți la utilizarea calculatorului (prin lipsă/prin adaos)!

14. Verificați dacă într-un vas în formă de cub, cu latura de lungime $\sqrt{52}$ cm, încap 374,95 litri de apă.

15. Calculați: $\sqrt{10^2 - 8^2}$; $\sqrt{25^2 - 20^2}$; $\sqrt{12^2 + 9^2}$; $\sqrt{24^2 + 10^2}$; $\sqrt{15^2 - 9^2}$.

16. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor:

a. $\sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{(-12)^2} + \sqrt{(-16)^2}$; b. $\sqrt{8^2 + 6^2} \leq \sqrt{8^2} + \sqrt{6^2}$; c. $\sqrt{13^2 - 5^2} \geq \sqrt{13^2} - \sqrt{(-5)^2}$.

17. Folosind descompunerea numerelor în produs de puteri de factori primi, calculați radicalii:

a. $\sqrt{12 \cdot 27}$; b. $\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 3}$; c. $\sqrt{1 \frac{4}{5} \cdot 1 \frac{1}{4} \cdot 1 \frac{13}{36}}$.



18. Știind că $x = \sqrt{13}$, calculați: a. $\sqrt{x^2 + 3}$; b. $\sqrt{x^4 - 25}$; c. $\sqrt{51 - 2x^2}$.

19. Aflați valorile naturale ale lui n , pentru care:

a. $57 \leq n^2 \leq 100$; b. $1475 \leq n^2 \leq 1700$; c. $n^2 \leq 598 \leq (n+1)^2$; d. $n^2 \leq 3746 \leq (n+1)^2$.

20. Dacă $x < 0$ și $y > 0$, calculați: a. $\sqrt{36x^2y^2}$; b. $\sqrt{x^4y^6}$; c. $\sqrt{\frac{64}{25}x^2y^4}$.

SCOATEREA FACTORILOR DE SUB RADICAL. INTRODUCEREA FACTORILOR SUB RADICAL

❖ Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$. Spunem că *am scos un factor* (număr pozitiv) *de sub radical*, dacă factorul este „mutat” în fața semnului radical și puterea sa se înjumătățește.

❖ Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^{2n+1} \cdot b} = a^n \sqrt{a \cdot b}$, n număr natural.

❖ Dacă $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^{2n} \cdot b} = |a^n| \sqrt{b}$, n număr natural.

❖ Dacă $a > 0$ și $b \geq 0$, atunci $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$. Spunem că *am introdus un factor* (număr pozitiv) *sub radical*, dacă factorul este „mutat” sub semnul radical și este ridicat la pătrat.

❖ Dacă $a < 0$ și $b \geq 0$, atunci $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$.

❖ O altă metodă de calcul a rădăcinii pătrate este descompunerea în factori. Dacă, după descompunerea numărului în factori primi diferiți, toți factorii au puteri pare, numărul este pătrat perfect și rădăcina sa pătrată este un număr natural.

SĂ NE AMINTIM

EXERSAȚII!



1. Scoateți factori de sub radical:

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| a. $\sqrt{45}$; | b. $\sqrt{18}$; | c. $\sqrt{125}$; | d. $\sqrt{80}$; | e. $\sqrt{300}$; | f. $\sqrt{450}$; |
| g. $\sqrt{1008}$; | h. $\sqrt{1350}$; | i. $\sqrt{294}$; | j. $\sqrt{720}$; | k. $\sqrt{810}$; | l. $\sqrt{250}$; |
| m. $\sqrt{2368}$; | n. $\sqrt{3750}$; | o. $\sqrt{1323}$; | p. $\sqrt{2880}$; | q. $\sqrt{3072}$; | r. $\sqrt{2268}$. |

2. Scoateți factori de sub radical, dacă $x \geq 0, y \geq 0, a \geq 0, b \geq 0$:

- | | | | | | |
|----------------------|---------------------|------------------------|----------------------|------------------------|--------------------|
| a. $\sqrt{450a^7}$; | b. $\sqrt{80x^6}$; | c. $\sqrt{32x^2y^4}$; | d. $\sqrt{25a^2b}$; | e. $\sqrt{72x^5y^3}$; | f. $\sqrt{5x^6}$. |
|----------------------|---------------------|------------------------|----------------------|------------------------|--------------------|

3. Introduceți factorii sub radical:

- | | | | | | |
|----------------------|--------------------|---------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|
| a. $5\sqrt{2}$; | b. $3\sqrt{5}$; | c. $2\sqrt{3}$; | d. $4\sqrt{3}$; | e. $3\sqrt{3}$; | f. $-2\sqrt{2}$; |
| g. $12\sqrt{2}$; | h. $-6\sqrt{7}$; | i. $-0,2\sqrt{3}$; | j. $1,5\sqrt{2}$; | k. $1,(3)\sqrt{21}$; | l. $2^2\sqrt{7}$; |
| m. $-9^0\sqrt{23}$; | n. $-16\sqrt{6}$; | o. $1,4\sqrt{5}$; | p. $3^2\sqrt{6}$; | r. $-2,(3)\sqrt{3}$; | s. $-2,8\sqrt{125}$. |

4. Introduceți factorii sub radical, dacă $x \geq 0, b \leq 0$:

- | | | | | | |
|------------------|------------------|---------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|
| a. $x \cdot b$; | b. $x\sqrt{5}$; | c. $x^2\sqrt{15}$; | d. $5x\sqrt{3x}$; | e. $-2x^2\sqrt{5x}$; | f. $17xb\sqrt{6b^2}$. |
|------------------|------------------|---------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|

5. Precizați care afirmație este adevărată și care este falsă:

- | | | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|
| a. $15\sqrt{2} = 5\sqrt{18}$; | b. $\sqrt{252} = 6\sqrt{7}$; | c. $10\sqrt{3} = 2\sqrt{75}$; | d. $-4\sqrt{5} = \sqrt{80}$; | e. $\sqrt{240x^4} = 4x^2\sqrt{15}$; |
| f. $\sqrt{125x^2} = 5x\sqrt{5}$; | g. $-\sqrt{128} = -4\sqrt{6}$; | h. $x\sqrt{162} = 9\sqrt{2x^2}$. | | |



6. Calculați:

- a. $\sqrt{25} - 3 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot \sqrt{64}$; b. $\sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt{4} + 3 \cdot \sqrt{36}$; c. $\sqrt{49} - 4 \cdot \sqrt{4} + 3 \cdot \sqrt{64}$;
 d. $\sqrt{225} - 2 \cdot (\sqrt{144} - \sqrt{100})$; e. $\sqrt{121} - 3 \cdot (\sqrt{169} - \sqrt{81})$; f. $\sqrt{196} - 4 \cdot (\sqrt{144} - \sqrt{121})$;
 g. $\sqrt{169} - 2 \cdot (\sqrt{121} - \sqrt{100})$; h. $\sqrt{16} - 3 \cdot \sqrt{25} + \sqrt{100}$.

7. Calculați:

- a. $\sqrt{121} - 3 \cdot \sqrt{81} + 2 \cdot \sqrt{49}$; b. $\sqrt{25} \cdot (\sqrt{64} - |\sqrt{4} - \sqrt{16}|) - \sqrt{121}$; c. $\sqrt{9} \cdot (\sqrt{100} - |\sqrt{16} - \sqrt{25}|)$.



8. Scoateți factori de sub radical: $\sqrt{3^8 \cdot 5^3}$; $\sqrt{2^{101}}$; $\sqrt{\frac{50}{60} \cdot \frac{75}{2}}$; $\sqrt{(-7)^2 \cdot 11}$; $-\sqrt{98}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 + 3\sqrt{576}}$; $\sqrt{2^3 + 4\sqrt{324}}$; $\sqrt{2^4 + 2\sqrt{289}}$; $\sqrt{3^2 + 3^2\sqrt{121}}$.

9. Scoateți factorii de sub radical, după ce puneți condiții de existență a acestora: $\sqrt{25a^2b}$; $\sqrt{5x^6}$; $\sqrt{81a^4b}$; $\sqrt{27x^2}$; $\sqrt{3x^2}$; $-\sqrt{41z^6}$.

10. Introduceți factorii sub radical: $3^{-1}\sqrt{12}$; $-7^{-1}\sqrt{14}$; $-9^0\sqrt{23}$; $-0,2\sqrt{3}$; $1,(3)\sqrt{21}$; $1,5\sqrt{2}$; $6^{-1}\sqrt{12}$; $-2^{-1}\sqrt{14}$; $-19^0\sqrt{23}$; $2,5\sqrt{2}$; $-0,1\sqrt{3}$.

11. Introduceți factorii sub radical: $x\sqrt{5}$; $y^2\sqrt{15}$; $-z^6\sqrt{41}$; $3x^2\sqrt{5}$; $x^2\sqrt{15}$.

12. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a. $6\sqrt{2} = \sqrt{72}$; b. $4\sqrt{10} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{40}$; c. $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$; d. $5\sqrt{3} > 6\sqrt{2}$;
 e. $\frac{3}{5}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{18}{25}}$; f. $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3} \neq -5\sqrt{3}$; g. $\sqrt{2^2 + 3} \neq 2\sqrt{3}$; h. $6\sqrt{3} \neq \sqrt{(-6)^2 \cdot 3}$.

13. Găsiți perechile de numere egale din enumerarea următoare: $-3\sqrt{5}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt{486}$; $-3\sqrt{900}$; $-\sqrt{45}$; $\sqrt{3600}$; $-6\sqrt{2}$; $9\sqrt{6}$; $\sqrt{1800}$; -90 .

14. Calculați:

- a. $\sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 5}$; b. $\sqrt{3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3}$; c. $\sqrt{12 + 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 21}$.

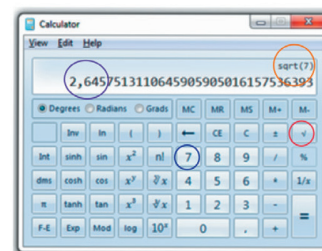
Comparați între voi strategiile de rezolvare, rețineți ideile care întăresc învățarea.



DESCOPERIȚI

Cum folosim calculatorul științific pentru a calcula valoarea, cu o aproximație oarecare, a rădăcinii pătrate dintr-un număr?

Observăm în poză, pentru $\sqrt{7}$, cum găsim valoarea aproximată prin lipsă la trei zecimale: apăsăm 7, după care apăsăm tasta $\sqrt{}$. Observăm numărul mare de zecimale care însă este limitat de ecranul calculatorului. Cu o aproximare de trei zecimale, $\sqrt{7} \approx 2,645$. În colțul din dreapta sus observați $\text{sqrt}(7)$, care este abrevierea pentru radical (din 7, în cazul nostru) și vine de la *square root*.



PARALELOGRAMUL

DEFINIȚIE

Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două se numește *paralelogram*. $ABCD$ este paralelogram dacă $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$.

TEOREMA 1

Într-un paralelogram:

- a) unghiurile consecutive sunt suplementare;
- b) unghiurile opuse sunt congruente.

RECIPROCA TEOREMEI 1

Dacă un patrulater convex are:

- a) oricare două unghiuri consecutive suplementare **sau**
 - b) unghiurile opuse congruente două câte două,
- atunci el este paralelogram.

TEOREMA 2

Într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente.

RECIPROCA TEOREMEI 2

Dacă un patrulater convex are laturile opuse congruente două câte două, atunci patrulaterul este paralelogram.

TEOREMA 3

Un patrulater convex în care două laturi opuse sunt paralele și congruente este paralelogram.

TEOREMA 4

Într-un paralelogram, punctul de intersecție al diagonalelor se află la mijlocul fiecărei diagonale.

RECIPROCA TEOREMEI 4

Dacă într-un patrulater convex punctul de intersecție al diagonalelor se află la mijlocul fiecărei diagonale, atunci patrulaterul este paralelogram.

Pentru a simplifica exprimarea, vom folosi *diagonalele se înjumătățesc* pentru faptul că *punctul de intersecție al diagonalelor se află la mijlocul fiecărei diagonale*.

EXERSAȚI!



1. Rezolvați cerințele din tabelul următor, referitoare la paralelogramul $ABCD$:

Ipoteză:	Concluzie:
a. $\sphericalangle A = 50^\circ$	$\sphericalangle B = ?$, $\sphericalangle C = ?$
b. $\sphericalangle D = 140^\circ$	Precizați unghiurile obtuze ale paralelogramului.
c. $AB = 8$ cm	$CD = ?$
d. $BC = 6$ cm, $CD = 7$ cm	$P_{ABCD} = ?$
e. $AC \cap BD = \{O\}$, $AO = 3$ cm, $DO = 5$ cm	$CO = ?$, $BD = ?$
f. $P_{ABCD} = 22$ cm, $P_{\triangle ABD} = 18$ cm	$BD = ?$

2. În paralelogramul $MNPQ$ se știe că $\sphericalangle MPN = 25^\circ$ și $\sphericalangle MPQ = 45^\circ$. Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului.

3. Perimetrul unui paralelogram este 30 cm, iar una dintre laturi are lungimea de 6 cm. Calculați lungimile tuturor laturilor paralelogramului.

4. Desenați paralelogramul $ABCD$ în fiecare dintre următoarele situații:

- a. $AB = 6$ cm, $\sphericalangle B = 115^\circ$ și $BC = 4$ cm;
- b. $AB = 5$ cm, $\sphericalangle A = 50^\circ$ și $BC = 3$ cm;
- c. $AD = 5,5$ cm, $AB = 7$ cm și $AC = 10$ cm;
- d. $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm și $\sphericalangle AOB = 120^\circ$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

5. Rezolvați cerințele din tabelul următor, referitoare la un paralelogram $ABCD$:

Ipoteză:	Concluzie:
a. $\sphericalangle A = 70^\circ$	$\sphericalangle B = ?$, $\sphericalangle C = ?$
b. $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm	P_{ABCD}
c. $AC \cap BD = \{O\}$, $AO = 4$ cm, $BD = 10$ cm	$AC = ?$, $DO = ?$
d. $BC = 8$ cm, $P_{ABCD} = 38$ cm	$AD = ?$, $AB = ?$
e. $P_{ABCD} = 36$ cm, $AC = 14$ cm	$P_{\triangle ABC} = ?$
f. $\sphericalangle ACB = 30^\circ$, $\sphericalangle CAB = 40^\circ$	$\sphericalangle BAD = ?$, $\sphericalangle ABC = ?$
g. $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B$	$\sphericalangle A = ?$

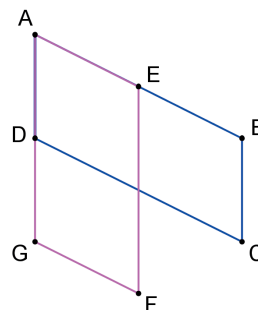


6. Calculați măsurile unghiurilor unui paralelogram în fiecare dintre situațiile:

- a. măsura unui unghi este dublă măsurii altui unghi;
- b. două dintre unghiuri au măsurile direct proporționale cu numerele 2 și 3;
- c. două dintre unghiuri au măsurile invers proporționale cu numerele 4 și 5.

7. În figura alăturată, $ABCD$ și $AEFG$ sunt paralelograme.

Demonstrați că $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle EFG$.



8. Desenați paralelogramul în fiecare dintre situațiile:

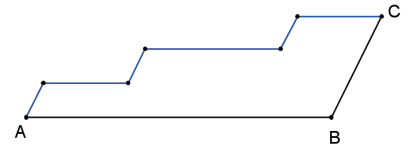
- $ABCD$: $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $\sphericalangle ABC = 130^\circ$;
- $EFGH$: $EF = 4,5$ cm, $EH = 3$ cm și $\sphericalangle FGH = 70^\circ$;
- $MNPQ$: $MP = 6$ cm, $QN = 8$ cm și $\sphericalangle MON = 120^\circ$, unde $\{O\} = MP \cap QN$;
- $ABCD$: $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm și $AD = 3$ cm (se recomandă folosirea cazului de construcție LLL de la triunghiuri).

9. Se consideră un triunghi ABC . Desenați punctul D astfel încât:

- $ABCD$ paralelogram; b. $ABDC$ paralelogram; c. $ADBC$ paralelogram.

10. În paralelogramul $ABCD$, bisectoarea unghiului A se intersectează cu cea a unghiului B în punctul E . Demonstrați că $\sphericalangle AEB = 90^\circ$.

11. În figura alăturată este prezentată schematic o scară. Laturile treptelor sunt paralele cu AB și, respectiv, cu BC . Se montează un covor pe trepte, de la A la C . Dacă $AB = 3$ m și $BC = 1,1$ m, calculați lungimea covorului.



12. Unele dintre următoarele afirmații sunt incomplete, altele au informații „în plus”. Corecțați, unde este cazul, pentru a obține afirmații adevărate și precizați care sunt informațiile „în plus”.

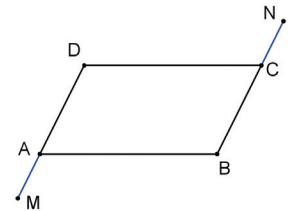
- Un paralelogram este un patrulater convex cu două laturi paralele și două laturi congruente.
- Un paralelogram este un patrulater convex cu laturile paralele și congruente două câte două.
- Un paralelogram este un patrulater convex cu laturile congruente două câte două.
- Un paralelogram este un patrulater convex cu unghiurile congruente două câte două.
- Dacă un patrulater convex are două unghiuri consecutive suplementare, atunci el este paralelogram.

13. Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N mijloacele laturilor AB și, respectiv, CD . Demonstrați că:

- $AMND$ este paralelogram; b. $AMCN$ este paralelogram.

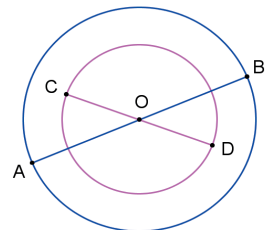
14. În figura alăturată este reprezentat un paralelogram $ABCD$. Punctele M , A și D , respectiv B , C și N sunt coliniare, iar $AM \equiv CN$. Demonstrați că:

- $MBND$ este paralelogram; b. $MC \parallel AN$.



15. Considerăm un triunghi ABC și mediana BM , $M \in AC$. Prelungim segmentul BM cu un segment MD , $MD \equiv MB$. Demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

16. În figura alăturată sunt reprezentate două cercuri concentrice și două diame-tre, CD în cercul cu raza mai mică și AB în cercul cu raza mai mare. Ce figură este $ADBC$? Justificați răspunsul.



17. Considerăm paralelogramul $AMCN$ și punctele B și D situate pe diagonala MN , astfel încât $MB \equiv ND$. Arătați că $ABCD$ este paralelogram.

18. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AB > AD$. Bisectoarea $\sphericalangle BAD$ intersectează latura CD în punctul E , iar bisectoarea $\sphericalangle BCD$ intersectează latura AD în punctul F . Demonstrați că:

- triunghiul DAE este isoscel; b. segmentele DE și FB sunt congruente;
- dreptele AE și FC sunt paralele.

- 19.** Fie triunghiul isoscel ABC , $AB = AC = 8$ cm și D un punct oarecare pe latura BC . Paralela prin D la AB intersectează AC în E , iar paralela prin D la AC intersectează AB în F .
- Demonstrați că triunghiul EDC este isoscel.
 - Demonstrați că $AFDE$ este paralelogram.
 - Calculați perimetrul paralelogramului $AFDE$.
- 20.** Fie triunghiul ABC și punctele D și E simetricele punctelor A și B față de punctul C . Demonstrați că $ED \equiv AB$ și $AE \parallel BD$.
- 21.** Decupați din hârtie colorată două triunghiuri congruente. Așezați-le astfel încât să obțineți un paralelogram, justificând așezarea.



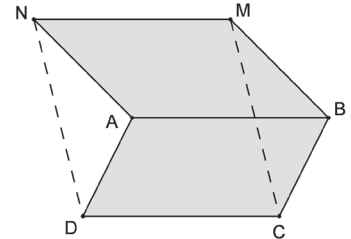
- 22.** În paralelogramul $ABCD$, $AB = 12$ cm, punctul M este situat pe latura AB astfel încât $MB = \frac{1}{4}AB$, iar punctul N aparține laturii CD astfel încât $CN = 9$ cm.
- Calculați lungimea segmentului AM .
 - Demonstrați că $AMCN$ este paralelogram.
 - Demonstrați că $BN \parallel DM$.

- 23.** Patrulaterul convex $ABCD$ este astfel încât $AB \parallel CD$, $AB = 9$ cm și $CD = 12$ cm. Punctul M este situat pe latura AB astfel încât $AM = \frac{1}{3}AB$, iar punctul N este mijlocul laturii CD . Demonstrați că patrulaterul $MBCN$ și $MBND$ sunt paralelograme.

- 24.** Paralelogramele $ABCD$ și $ABMN$ au latura comună AB , iar punctele C și M sunt de o parte și de alta a dreptei AB . Demonstrați că:

- $MN \parallel CD$;
- $MC \parallel ND$;
- $\sphericalangle DAN \equiv \sphericalangle CBM$.

- 25.** În paralelogramul $ABCD$ considerăm punctul M pe latura AB și construim $AN \parallel CM$, cu $N \in CD$. Demonstrați că $BM \equiv DN$.



- 26.** În paralelogramul $ABCD$, $\sphericalangle A = 60^\circ$, bisectoarea unghiului BAD intersectează bisectoarea unghiului ABC în punctul M .

- Demonstrați că $\sphericalangle AMB = 90^\circ$ și $MB = \frac{AB}{2}$.

- Paralela prin M la AB intersectează AD și BC în N , respectiv P . Demonstrați că:

- M este mijlocul segmentului NP ;
- $AB = 2AN$;
- triunghiul MBP este echilateral.

- 27.** În paralelogramul $ABCD$, $AB > CD$, considerăm $DM \perp AC$, $M \in AC$ și $BN \perp AC$, $N \in AC$. Demonstrați că:

- $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle CBN$;
- $AM \equiv CN$;
- $BM \parallel DN$.

- 28.** În paralelogramul $ABCD$ notăm cu O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD . O dreaptă construită prin punctul O , neparalelă cu niciuna dintre laturile patrulaterului, intersectează laturile BC și AD în punctele M , respectiv N . Demonstrați că:

- $MO \equiv ON$;
- $MB \equiv ND$;
- $AM \parallel CN$.

- 29.** În paralelogramul $ABCD$ considerăm punctele M și N , simetricele punctelor B , respectiv D , față de punctul C . Demonstrați că:

- $MN \parallel BD$;
- $BN \equiv MD$.